Cálculo científico y técnico con HP49g/49g+/48gII/50g
Módulo 3: **Aplicaciones**
Tema 3.6 **Extremos relativos de funciones de 2 variables**

Francisco Palacios
Escuela Politécnica Superior de Ingeniería de Manresa
Universidad Politécnica de Catalunya
Dep. Matemática Aplicada III

Abril 2008, versión 1.3

Contenido

Índice General

1 Introducción

1.1 Puntos críticos

Supongamos que deseamos determinar los extremos relativos de una función de dos variables $f(x,y)$ con derivadas parciales continuas hasta orden 2. En tal caso, los posibles extremos se producen en los llamados *puntos críticos,* que son puntos que anulan simultáneamente las derivadas parciales primeras de $f(x,y)$. Es decir, (x,y) es un punto crítico si es solución del sistema

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0, \\ f'_y(x,y) = 0. \end{cases}$$

Si tenemos en cuenta que el gradiente de f es el vector

$$\nabla f(x,y) = \left(f'_x(x,y), f'_y(x,y)\right),$$

obtenemos que (x,y) es un punto crítico de f si anula su vector gradiente

$$\nabla f(x,y) = \vec{\mathbf{0}}.$$

Ejemplo 1.1 *Puntos críticos de la función*

$$f(x,y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy.$$

Calculamos las derivadas parciales

$$f'_x(x,y) = 3x^2 - 3y, \qquad f'_y(x,y) = 3y^2 - 3x.$$

Los puntos críticos de f son las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0. \end{cases}$$

Se trata de un sistema no lineal. Eliminamos el factor 3 en ambas ecuaciones y despejamos la incógnita y en la primera ecuación

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y^2 - x = 0. \end{cases}$$

Sustituimos en la segunda ecuación y resulta

$$x^4 - x = 0.$$

Factorizamos el polinomio

$$x\left(x^3 - 1\right) = 0$$

y obtenemos

$$x = 0, \quad x = 1.$$

Teniendo en cuenta la ecuación

$$y = x^2,$$

resultan los puntos críticos

$$P_1 = (0,0), \quad P_2 = (1,1). \quad \square$$

Actividad 1.1 *Calcula manualmente los puntos críticos de la función*

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7y.$$

(*Sol.* $P = (1,4)$)

1.2 Matriz Hessiana

Consideremos las derivadas parciales segundas de $f(x,y)$

$$D_{11}\,f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y), \qquad D_{12}\,f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y),$$

$$D_{21}\,f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y), \qquad D_{22}\,f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y).$$

La *matriz Hessiana* de $f(x,y)$ es la matriz de derivadas segundas de f

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} D_{11}\,f(x,y) & D_{12}\,f(x,y) \\ D_{21}\,f(x,y) & D_{22}\,f(x,y) \end{pmatrix}.$$

La primera fila de $H(x,y)$ contiene las derivadas parciales de f'_x, la segunda fila contiene las derivadas parciales de f'_y.

Ejemplo 1.2 *Matriz Hessiana de* $f(x,y) = x^2 + xy + xe^y$.

Las derivadas parciales primeras son

$$f'_x(x,y) = 2x + y + e^y, \qquad f'_y(x,y) = x + xe^y.$$

Derivando f'_x, resulta

$$D_{11}f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f'_x = 2, \quad D_{12}f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f'_x = 1 + e^y.$$

Derivamos f'_y,

$$D_{21}f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f'_y = 1 + e^y, \quad D_{22}f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f'_y = xe^y.$$

La matriz hessiana de $f(x,y)$ es

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 + e^y \\ 1 + e^y & xe^y \end{pmatrix}.$$

1.3 Clasificación de puntos críticos

Apoyándonos en la matriz Hessiana podemos determinar el comportamiento de la función $f(x,y)$ en un punto crítico $P_c = (x_c, y_c)$.

- Si $D_{11}\, f(x_c, y_c) > 0$ y $\det\,[H(x_c, y_c)] > 0$, entonces f tiene un *mínimo relativo* en (x_c, y_c).
- Si $D_{11}\, f(x_c, y_c) < 0$ y $\det\,[H(x_c, y_c)] > 0$, entonces f tiene un *máximo relativo* en (x_c, y_c).
- Si $\det\,[H(x_c, y_c)] \neq 0$ y no estamos en ninguno de los casos precedentes, entonces f tiene un *punto de silla* en (x_c, y_c).
- Si $\det\,[H(x_c, y_c)] = 0$, esto es, cuando la matriz Hessiana $H(x_c, y_c)$ es singular, el criterio no decide.

Ejemplo 1.3 *Matriz Hessiana y clasificación de puntos críticos.*

Consideremos nuevamente la función

$$f(x,y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy.$$

En el ejemplo anterior hemos calculado las derivadas parciales primeras

$$f'_x(x,y) = 3x^2 - 3y, \qquad f'_y(x,y) = 3y^2 - 3x.$$

A partir de ellas, se obtiene la matriz Hessiana

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

También hemos visto en el ejemplo anterior que los puntos críticos de f son $P_1 = (0,0)$ y $P_2 = (1,1)$.

- En $P_1 = (0,0)$ obtenemos

  $$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Como es

  $$\det\,[H(0,0)] = -9 \neq 0, \quad D_{11}\, f(0,0) = 0,$$

  resulta que f tiene un punto de silla en $(0,0)$.

- En el punto crítico $(1,1)$, resulta

  $$H(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix},$$

  de donde obtenemos

  $$D_{11} f(1,1) = 6 > 0, \quad \det\,[H(1,1)] = 27 > 0.$$

  Por lo tanto, f tiene un mínimo relativo en $(1,1)$. $\square$

2 Resolución con la calculadora

2.1 Cálculo de Puntos críticos

En principio, si sólo estamos interesado en los puntos críticos, podemos usar los comandos

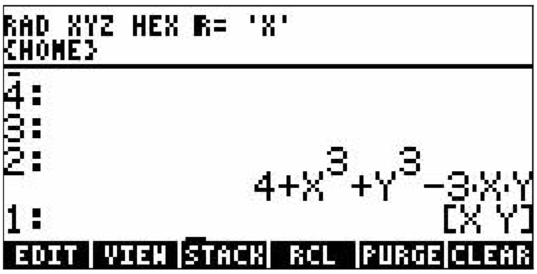
- DERIV, que permite calcular las derivadas parciales.
- SOLVE, que permite resolver sistemas de ecuaciones.

Consideremos la función

$$f(x, y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy.$$

Actividad 2.1 *En esta actividad, vamos a calcular el gradiente de f. Realiza los siguientes pasos:*

1. Fija el modo exacto $\mathbb{R}=$.
2. Carga en la pila la expresión $4 + x^3 + y^3 - 3xy$ seguida de un vector con las variables[1] $[x, y]$.



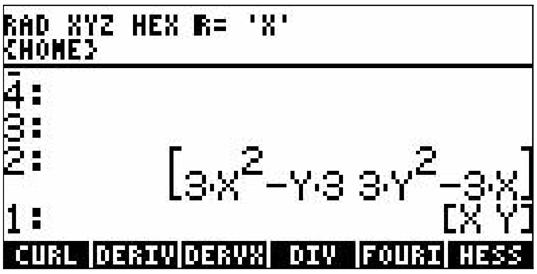
3. Ejecuta el comando DERIV, lo encontrarás en [CALC][DERIV]. Como resultado obtendrás el gradiente de f

$$\nabla f(x, y) = \left(f'_x(x, y), f'_y(x, y)\right) = \left(3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x\right).$$

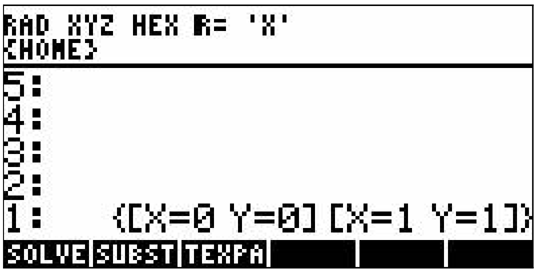
Actividad 2.2 *Una vez obtenido el gradiente, vamos a usar el comando* SOLVE *para determinar los puntos críticos. Realiza los siguientes pasos:*

1. Como resultado de la actividad anterior, debes tener el gradiente de f en el Nivel 1 de la pila. Carga nuevamente en la pila un vector con las variables $[x, y]$

[1] Si construyes el vector $[x, y]$ en la pila, recuerda que debes poner las variables entre comillas simples, en caso contrario, se produce un error. Si usas el editor de matrices para construir el vector, entonces no es necasario que uses las comillas simples.



2. Ejecuta el comando SOLVE. Puedes encontrar este comando en [S.SLV][2], o bien en la segunda página de [ALG][3]. Como resultado obtendrás una lista[4] con los puntos críticos de f.



Actividad 2.3 *Calcula los puntos críticos de la función*

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7y$$

usando DERIV *y* SOLVE. (*Sol.* $(1, 4)$)

Actividad 2.4 *Calcula los puntos críticos de la función*

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20$$

usando DERIV *y* SOLVE. (*Sol.* $(-2, 3)$)

2.2 Determinación de extremos

La forma más eficaz de obtener los extremos es usar el comando HESS, que calcula el gradiente y la matriz Hessiana, también proporciona un vector con las variables, de modo que se facilita el uso de comando SOLVE.

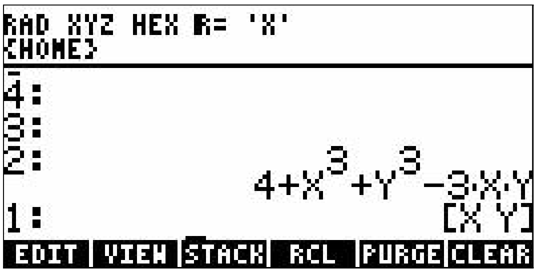
Actividad 2.5 *En esta actividad, vamos a determinar los extremos de la función*

$$f(x, y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy,$$

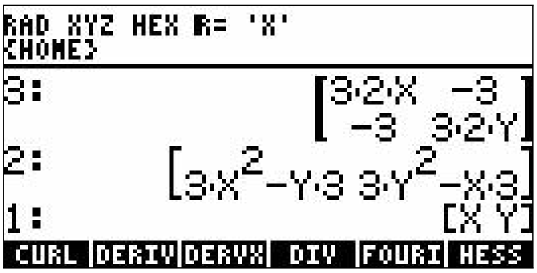
usando los comando HESS, SOLVE *y* SUBST. *Realiza los siguientes pasos:*

[2] Tecla ↰[7].
[3] Tecla ↱[4].
[4] Podemos ejecutar EVAL para romper la lista.

1. Carga en la pila la expresión de la función seguida de un vector con las variables.

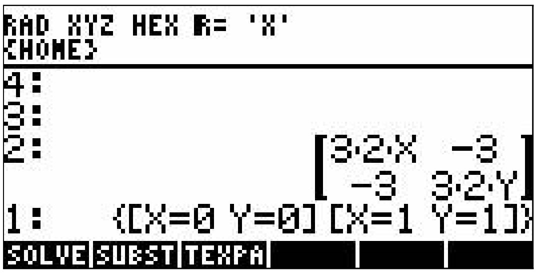


2. Ejecuta el comando HESS, lo encontrarás en [CALC][DERIV]. Como resultado se obtienen tres objetos



- En el Nivel 3 obtendrás la matriz Hessiana,
- en el Nivel 2, obtendrás el gradiente,
- en el Nivel 1, obtendrás un vector con las variables.

3. Ejecuta SOLVE, obtendrás una lista con los puntos críticos

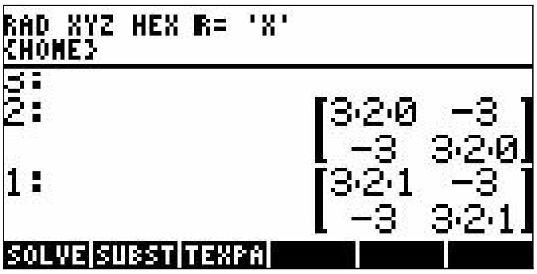


Observamos que los puntos críticos son $(0,0)$ y $(1,1)$.

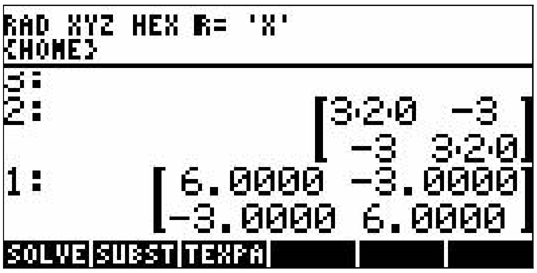
4. Ahora tienes substituir los puntos críticos en el la matriz Hessiana para realizar la clasificación. Ejecuta el comando SUBST, que se encuentra en la segunda página de [ALG]

El resultado es un lista que contiene la matriz Hessiana evaluada en los puntos críticos.

5. Pulsa EVAL para romper la lista.

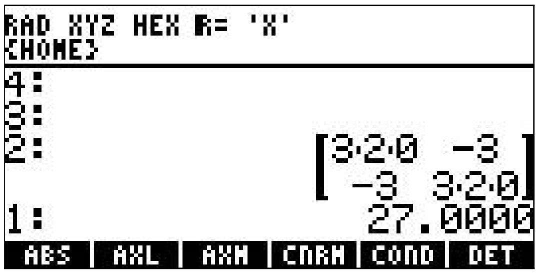


Observa que en las matrices Hessianas las operaciones aparecen indicadas. Es decir, se ha realizada la substitución pero no se han efectuado operaciones. La forma más sencilla de forzar la evaluación es ejecutar el comando[5] →NUM.



6. La matriz hessiana en el nivel 1 de la pila corresponde al último punto crítico, esto es, $(1, 1)$. Vemos que $D_{11}f(1, 1) = 6 > 0$. Para calcular $\det [H(1, 1)]$ puedes ejecutar el comando DET, que está en [MATRICES][OPER]

[5] Selecciona el modo Fix 4, para que los números decimales aparezcan con 4 decimales.

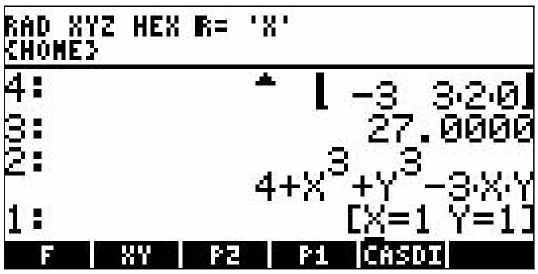


Como

$$D_{11}f(1,1) = 6 > 0, \quad \det[H(1,1)] > 0,$$

concluimos que f tiene un mínimo relativo en $(1,1)$.

7. Finalmente, para calcular el valor del mínimo tienes que evaluar la función en el punto crítico $P = (1,1)$. Una forma de hacerlo es cargar la expresión de $f(x,y)$ en la pila seguida de un vector de la forma[6] $[x = 1, y = 1]$ y usar el comando SUBST, seguido de EVAL o →NUM.



Como resultado, obtendrás $f_{\text{min}} = f(1,1) = 3$.

Actividad 2.6 *Repite le proceso indicado para el punto crítico* $(0,0)$.

Actividad 2.7 *Determina y clasifica los puntos críticos de la función*

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7y.$$

(*Sol.* La función tiene un mínimo en $(1,4)$. $f_{\text{min}} = -14$.)

3 Recursos gráficos

3.1 Representación de superficies

Los tipos de gráfico `Fast3D` y `Ps-contour` pueden ser útiles para visualizar el comportamiento de una función $f(x,y)$ en las proximidades de un punto crítico. Tomemos como ejemplo la función

$$f(x,y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$$

[6] Puede ser una buena idea guardar los puntos criticos en la forma $[x = x_0, y = y_0]$ una variable para evitar volver a escribirlos a la hora de hacer sustituciones.

que, como se ha visto anteriormente, tiene puntos críticos $P_1 = (0,0)$ y $P_2 = (1,1)$. En primer lugar, vamos a representar la superficie $z = f(x,y)$ en un entorno del punto crítico $P_1 = (0,0)$.

Actividad 3.1 *Representación de superficies con Fast3D.*

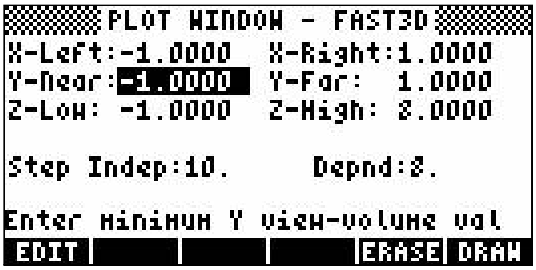
En esta actividad, vamos a representar la superficie

$$z = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$$

en un entorno del punto crítico $P_1 = (0,0)$. Realiza los siguientes pasos:

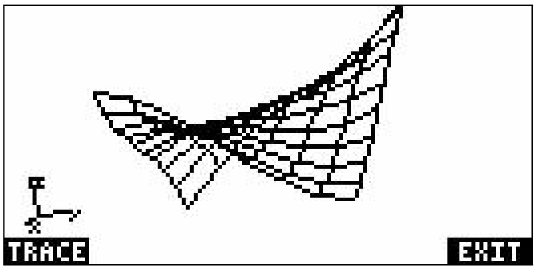
1. Accede al formulario Plot Setup y selecciona el tipo de gráfico Fast3D.

2. Accede al formulario Plot Window, y fija los intervalos de representación con los valores $x \in [-1,1]$, $y \in [-1,1]$, $z \in [-1,8]$



3. Accede al entorno de entrada de ecuaciones y entra la función.

4. Finalmente, pulsa [ERASE] [DRAW] y obtendrás.



Observa que, efectivamente, la función presenta una estructura de punto de silla en las proximidades de $(0,0)$.

3.2 Curvas de nivel

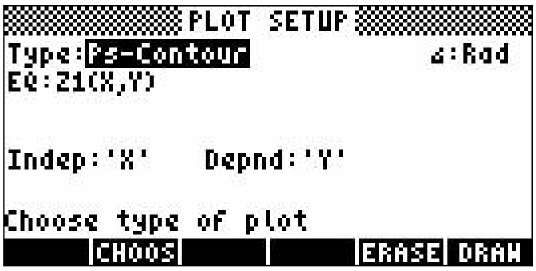
Actividad 3.2 *Representación de curvas de nivel con* `Ps-contour`.

En esta actividad, vamos a obtener un mapa de las curvas de nivel de la función

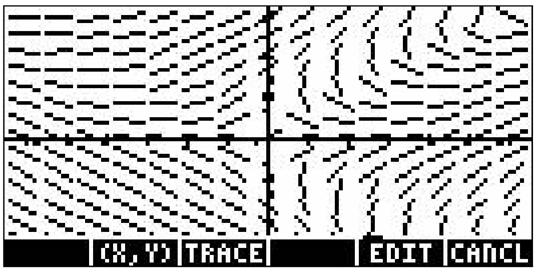
$$f(x,y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$$

en las proximidades del punto crítico $P_1 = (0,0)$, realiza los siguientes pasos:

1. Accede a Plot Window y selecciona el tipo de gráfico `Ps-contour`.



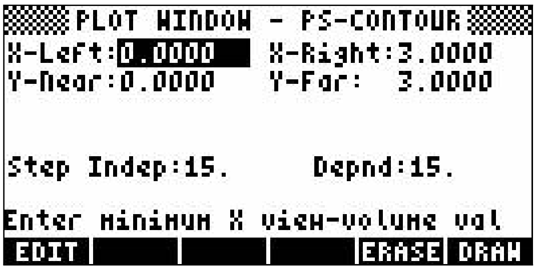
2. Pulsa ERASE, DRAW y obtendrás el gráfico



Actividad 3.3 *Identificación gráfica de extremo relativo usando las curvas de nivel.*

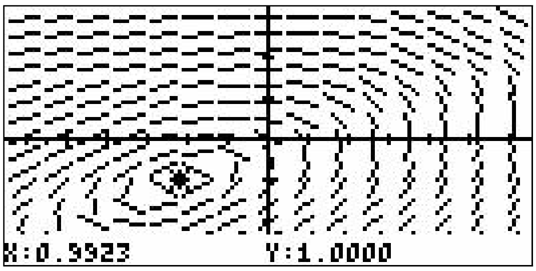
Si intentas dibujar la superficie $z = f(x, y)$ en las proximidades de $P_2 = (1, 1)$ con un gráfico del tipo `Fast3D` verás que no es posible obtener un buen resultado. Puedes inspeccionar el mapa de curvas de nivel mediante un gráfico del tipo `Ps-contour`.

1. Para ello ajusta los parámetros de representación como sigue

   de esa forma obtendrás el mapa de curvas de nivel para la región $x \in [0, 3]$, $y \in [0, 3]$ que contiene el punto de interés.

2. Ejecuta ERASE, DRAW y obtendrás

   En el gráfico puedes apreciar que en el entorno del punto crítico $P_1 = (1, 1)$, las curvas de nivel presentan la estructura típica de un extremo relativo. Obviamente, a partir de gráfico no podemos decidir si se trata de un máximo o un mínimo

Actividad 3.4 *Representa la función*

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7y$$

usando un gráfico Fast3D *en las proximidades del punto crítico* $(1, 4)$, *puedes tomar por ejemplo* $x \in [0, 2]$, $y \in [3, 5]$. *Calcula el valor de* $f(1, 4)$ *para determinar un intervalo adecuado de* z.

Actividad 3.5 *Representa la función*

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7y$$

usando un gráfico Ps-contour *en las proximidades del punto crítico* $(1, 4)$.

Actividad 3.6 *Halla los extremos locales de la función*

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 3x + 5y$$

Dibuja un gráfico de las curvas de nivel en las proximidades de los puntos críticos. (*Sol. Punto crítico* $(1/2, -1)$, *es un mínimo.* $f_{\min} = -13/4$)

Actividad 3.7 *Halla los extremos locales de la función*

$$f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

Dibuja un gráfico de las curvas de nivel en las proximidades de los puntos críticos, ten en cuenta que la función es discontínua sobre los ejes. (*Sol. Punto crítico* $(1, 1)$, *es un mínimo.* $f_{\min} = 1$)